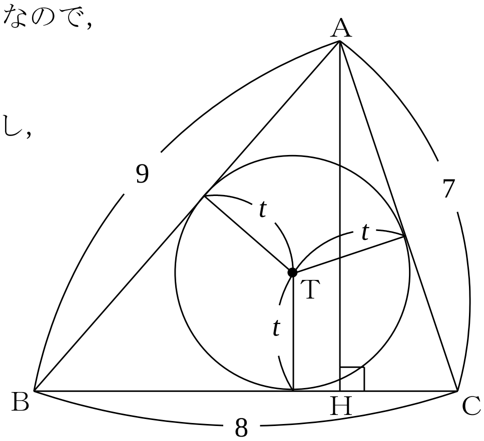
解答・解説

(1)　Ｔは辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡから等距離にある点なので，
△ＡＢＣの内心である。
　よって，t はその内接円の半径である。
　Ａから辺ＢＣに垂線を引き，その交点をＨとし，
ＢＨ$=w$ とおくと，$(\mathrm{AH})^2$ について，
$9^2-w^2=7^2-(8-w)^2$ が成り立つ。
　これを解いて，$w=6$，ＡＨ$=\sqrt{9^2-6^2}=3\sqrt{5}$
　△ＡＢＣの面積について，

$$9\times t\times\frac{1}{2}+8\times t\times\frac{1}{2}+7\times t\times\frac{1}{2}=8\times 3\sqrt{5}\times\frac{1}{2}$$

　これを解いて，$t=\sqrt{5}$ …(答)



(2)　点Ｐ(3，1，5) が△ＡＢＣの内部に存在するので，

$$\triangle\mathrm{ABC}=a\times 3\times\frac{1}{2}+b\times 1\times\frac{1}{2}+c\times 5\times\frac{1}{2}=\frac{3a+b+5c}{2}$$

　点Ｑ，Ｒでも同様にして，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2a+4b+4c}{2}=\frac{5a+b+3c}{2}$$ となるので，

$3a+b+5c=2a+4b+4c=5a+b+3c$ である。
　ここで，$3a+b+5c=5a+b+3c$ より，
$2a=2c$，$a=c$ を得る。
　また，$3a+b+5c=2a+4b+4c$ であるから，
$a=c$ を代入して，$b+8c=4b+6c$，$3b=2c$
　よって，$b:c=2:3$ であるから，
$a:b:c=3:2:3$ …(答)